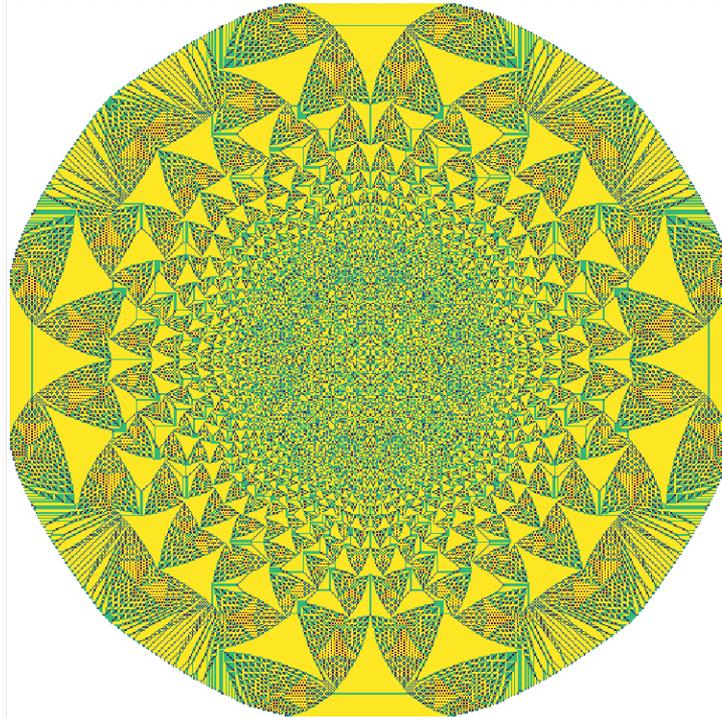


Criticalité auto-organisée

Modèle du tas de sable



Motivation initiale

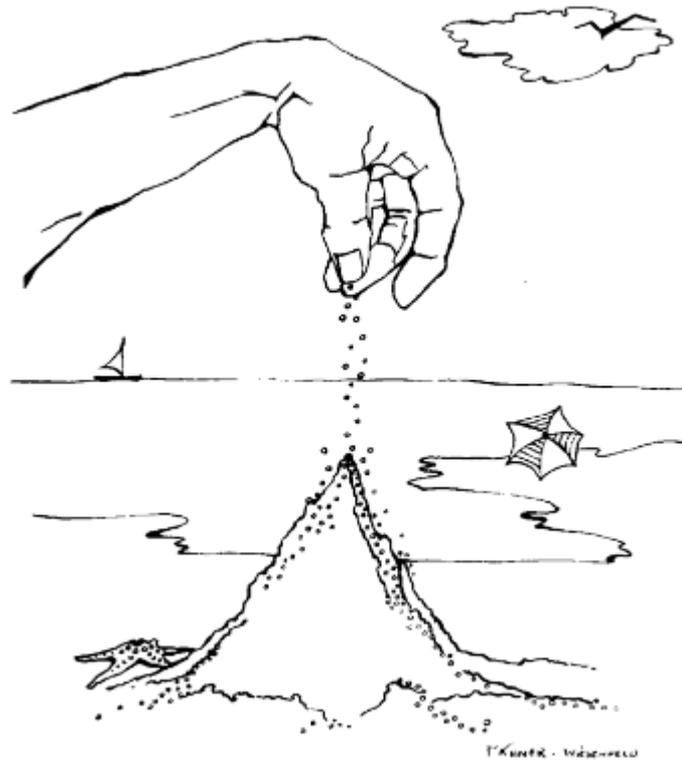
- Difficulté d'étude de certains phénomènes naturels :
 - Avalanches
 - Eboulements
 - Tremblements de terre

- Auto-Organisation : Capacité à se stabiliser sans intervention de l'extérieur

- Auto-Organisation : Capacité à se stabiliser sans intervention de l'extérieur
- Criticalité : Les éléments du systèmes s'influencent mutuellement
 - Conséquence : une même perturbation peu avoir des effets très différents selon l'état du système → Difficultés d'analyse

Le modèle du Tas de Sable

Bak, Tang et Wiesenfeld



Principe

0	0	0
0	0	0
0	0	0



0	0	0
0	1	0
0	0	0



0	0	0
0	2	0
0	0	0



0	0	0
0	3	0
0	0	0



0	1	0
1	0	1
0	1	0

Exemple de stabilisation

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Formalisation du modèle

- Un tas de sable est constitué d'un ensemble fini de N sites (numérotés de 0 à $N-1$), et d'une matrice de déversement Δ
- Un état de l'automate est un vecteur à N coordonnées
- $\Delta_{ij} = 4$ si $i = j$
-1 si i et j sont voisins
0 sinon
- Si $z(i) > 3$ on dit que i est critique

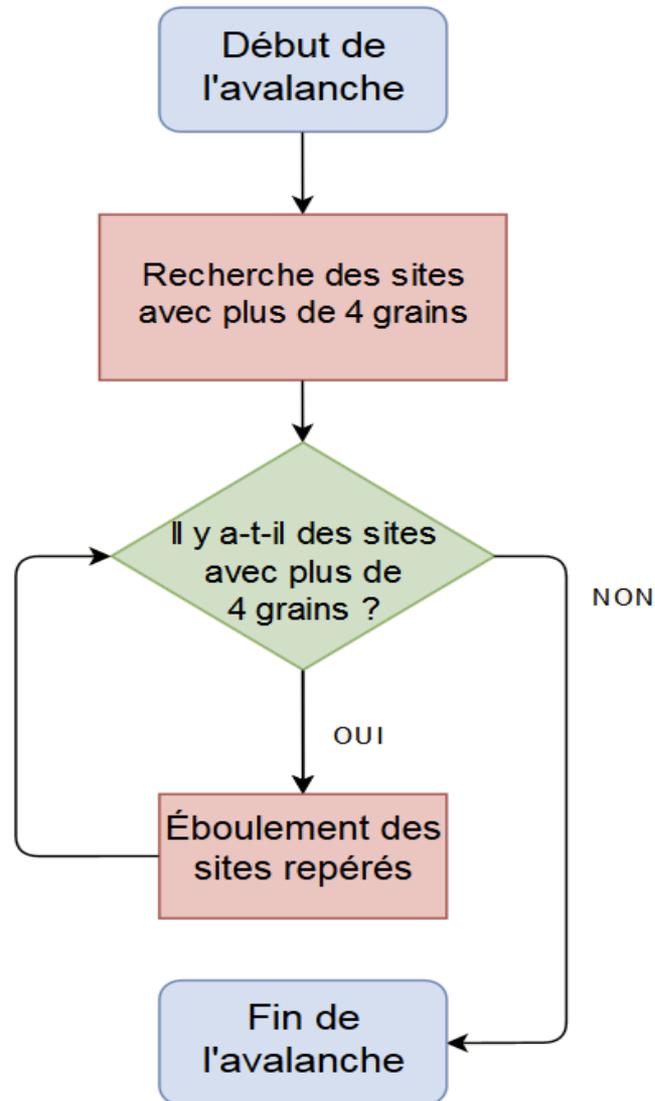
$$N = p * q$$

Matrice de déversement pour $p = 2$ $q = 3$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Si i est un site critique, à l'instant suivant $z'(j) = z(j) - \Delta_{ij}$
pour tout j de $[0, N-1]$

Algorithme d'avalanche



Taille Finie des avalanches

(Preuve de terminaison de l'algorithme d'avalanche)

- Preuve classique :

$$\sum_{i=0}^{N-1} (l(i) + c(i))^2 z(i)$$

avec $l(i)$ et $c(i)$ les ligne et colonne du site i

Taille Finie des avalanches

(Preuve de terminaison de l'algorithme d'avalanche)

Taille Finie des avalanches

(Preuve de terminaison de l'algorithme d'avalanche)

- Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite infinie d'éboulements.

Taille Finie des avalanches

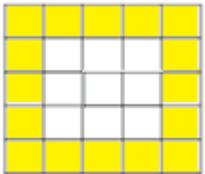
(Preuve de terminaison de l'algorithme d'avalanche)

- Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite infinie d'éboulements.
- Il n'y a qu'un nombre fini (m^N) de configurations possibles avec m le nombre total de grains. L'automate passe donc plusieurs fois par le même état.

Taille Finie des avalanches

(Preuve de terminaison de l'algorithme d'avalanche)

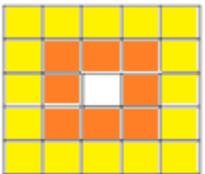
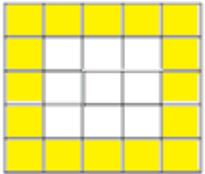
- Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite infinie d'éboulements.
- Il n'y a qu'un nombre fini (m^N) de configurations possibles avec m le nombre total de grains. L'automate passe donc plusieurs fois par le même état.
- Par conséquent le nombre de grains de sable présent ne peut pas diminuer → Il ne peut pas y avoir d'éboulement sur les bords.



Taille Finie des avalanches

(Preuve de terminaison de l'algorithme d'avalanche)

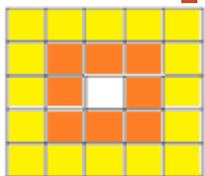
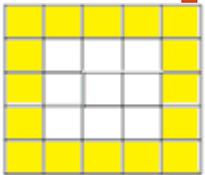
- Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite infinie d'éboulements.
- Il n'y a qu'un nombre fini (m^N) de configurations possibles avec m le nombre total de grains. L'automate passe donc plusieurs fois par le même état.
- Par conséquent le nombre de grains de sable présent ne peut pas diminuer → Il ne peut pas y avoir d'éboulement sur les bords.
- Il ne peut pas y avoir d'éboulement juste à côté du bord car un tel éboulement enverrait des grains sur le bord (et ils ne pourraient pas revenir).



Taille Finie des avalanches

(Preuve de terminaison de l'algorithme d'avalanche)

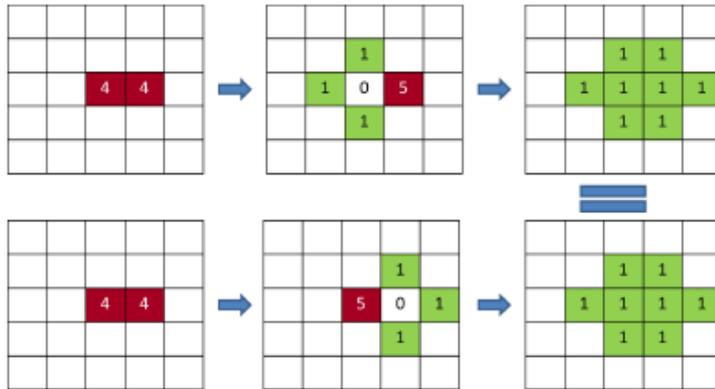
- Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite infinie d'éboulements.
- Il n'y qu'un nombre fini (m^N) de configurations possibles avec m le nombre total de grains. L'automate passe donc plusieurs fois par le même état.
- Par conséquent le nombre de grains de sable présent ne peut pas diminuer → Il ne peut pas y avoir d'éboulement sur les bords.
- Il ne peut pas y avoir d'éboulement juste à côté du bord car un tel éboulement enverrait des grains sur le bord (et ils ne pourraient pas revenir).
- On conclut par récurrence qu'il n'y a en fait aucun éboulement dans ce cas.



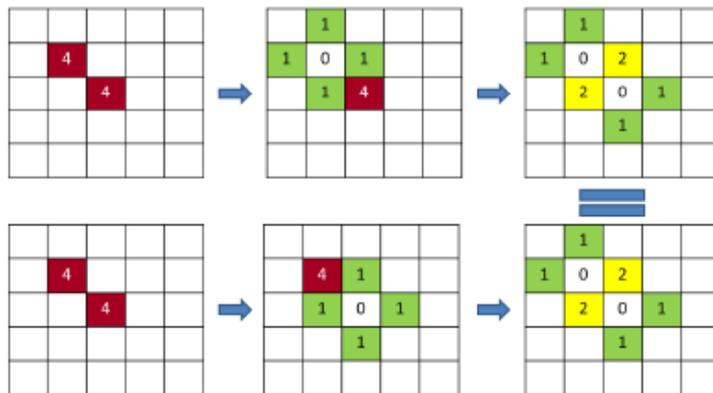
Unicité de l'état final

(Correction de l'algorithme)

- Deux cellules à distance 1 :



- Deux cellules à distance 2 :



- Deux cellules à une distance strictement supérieure à 2 : il n'y a plus d'interférence entre les écroulements

Unicité à permutation près de la suite d'éboulements menant d'un état à un autre

- Montrons que Δ est inversible

Soit $X = (x_1 \dots x_n)$ tel que $\Delta X = 0$

Notons $m = \max(|x_j|)$ et notons i le plus petit indice tel que $m = |x_i|$.

$$\sum_{0 \leq j \leq N} \Delta_{ij} x_j = 0$$

$$4|x_i| = \left| \sum_{j \in \text{voisin}(i)} x_j \right| \leq \sum_{j \in \text{voisin}(i)} |x_j| \leq \sum_{j \in \text{voisin}(i)} |x_i|$$

- Soit i a moins de 3 voisins $\rightarrow x_i = 0$
- Soit i a 4 voisins mais par construction de i , son voisin gauche est strictement plus petit $\rightarrow x_i = 0$

Donc $X=0$ et Δ est inversible

Unicité à permutation près de la suite d'éboulements menant d'un état à un autre
(Correction de l'algorithme)

- Soient deux états z et z' tels que $z \rightarrow z'$
- En voyant z comme un vecteur la transformation s'écrit

$$z' = z - \sum_{0 \leq i \leq N} \lambda_i \Delta_i$$

Et les λ_i sont uniques par liberté des Δ_i

Opération sur les états

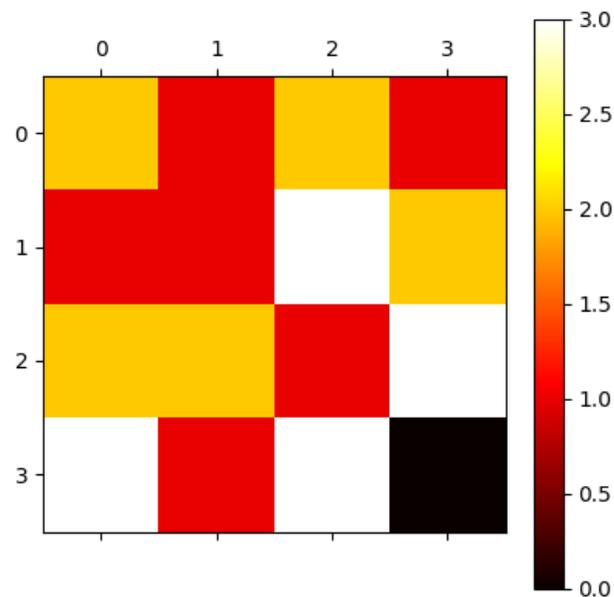
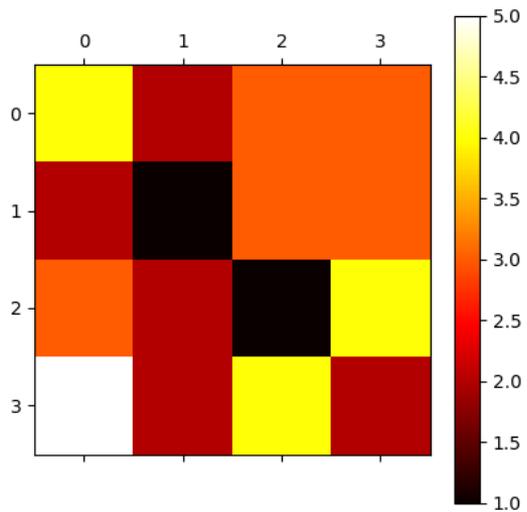
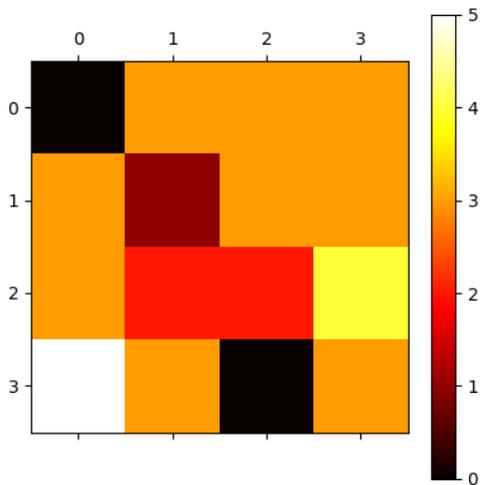
Étant donnés deux états A et B notons :

$A+B$ l'état obtenu en sommant coefficient par coefficient les états A et B

$A\oplus B$ l'état stable obtenu à partir de $A+B$

Par ce qui précède \oplus est interne, commutative, associative (en écrivant l'éboulement comme une somme d'éboulement de taille 1) et possède 0 (matrice nulle) pour élément neutre.

→ Monoïde



Inversibilité

Problème : Après un éboulement il y a toujours au moins deux sites non vides. Les états ne sont donc pas tous inversible.

Si c'était un groupe, pour toute configuration A on pourrait trouver $B = A^{-1} \oplus A$ telle que $A \oplus B = A$

Inversibilité(bis)

Définition : Un état récurrent est un état obtenu en ajoutant des grains à Z_{max}

On considère à présent l'ensemble des états récurrents.

$$\bar{A} = Z_{max} - A$$

Notons $e = Z_{max} \oplus \overline{Z_{max} \oplus Z_{max}}$

A une configuration récurrente

$$A = Z_{max} \oplus A'$$

$$A \oplus e = A' \oplus Z_{max} \oplus Z_{max} \oplus \overline{Z_{max} \oplus Z_{max}}$$

$$A \oplus e = A' \oplus Z_{max} = A$$

$$\begin{aligned}
A \oplus \overline{A \oplus Z_{max}} &= A' \oplus Z_{max} \oplus \overline{A \oplus Z_{max}} \\
&= A' \oplus Z_{max} \oplus e \oplus \overline{A \oplus Z_{max}}
\end{aligned}$$

$$= A' \oplus Z_{max} \oplus Z_{max} \oplus \overline{Z_{max} \oplus Z_{max}} \oplus \overline{A \oplus Z_{max}}$$

$$= A \oplus Z_{max} \oplus \overline{A \oplus Z_{max}} \oplus \overline{Z_{max} \oplus Z_{max}}$$

$$= Z_{max} \oplus \overline{Z_{max} \oplus Z_{max}}$$

$$= e$$

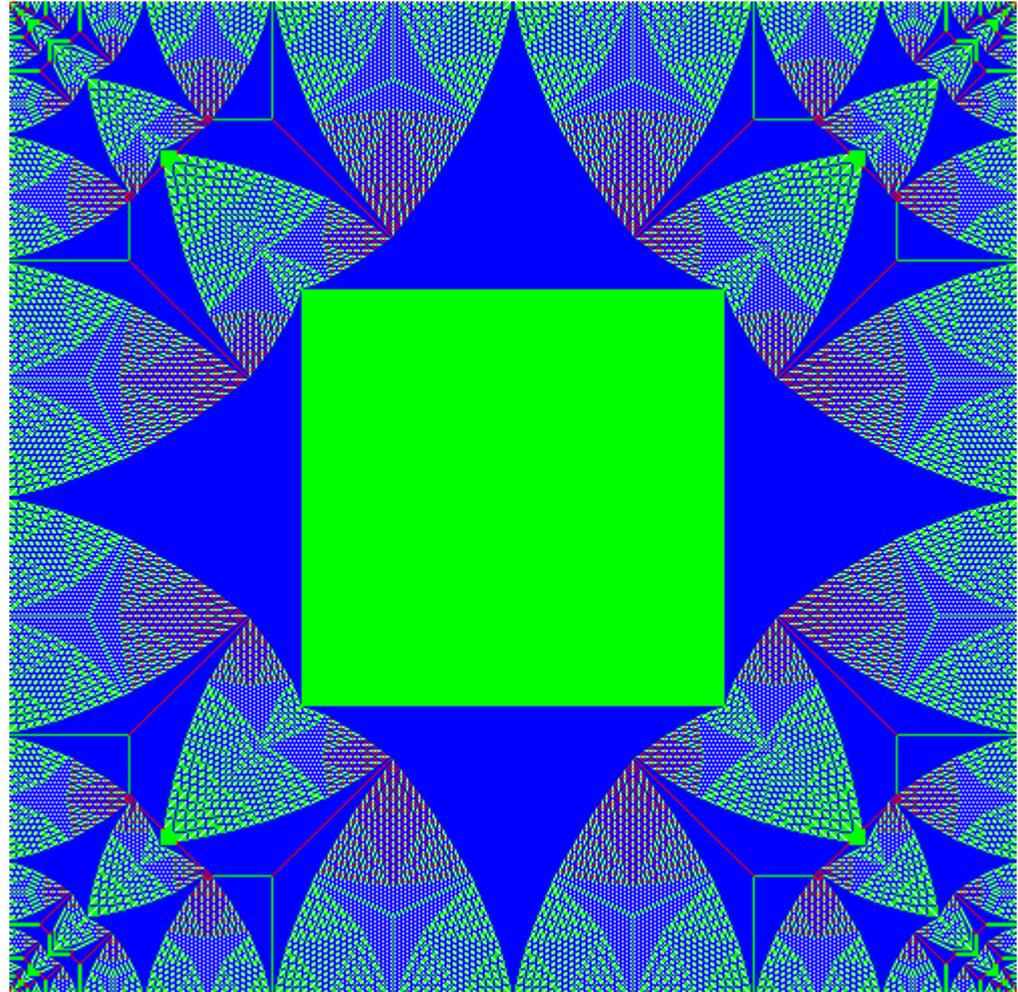
L'élément neutre pour $500*500$

Bleu=3

Vert=2

Rouge=1

Blanc=0



Critère de Dhar

Caractérisation des configurations récurrentes :

Z est récurrente ssi $Z \oplus B = Z$

Et chaque sommet s'éboule une seule fois lors de la stabilisation

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bijection de Dhar

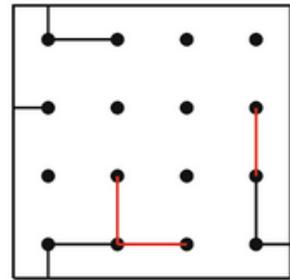
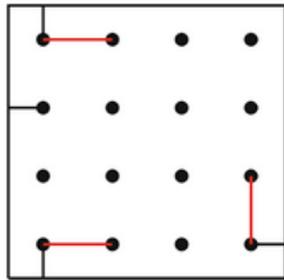
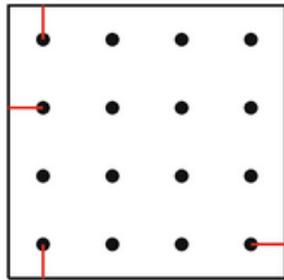
Chaque sommet s'éboule une et une seule fois donc si à chaque étape on énumère les arrêtes qui rendent les sommets suivant instables, tous les sommets seront atteints et il ne peut pas y avoir de cycle.

On a donc un arbre couvrant.

3	2	1	1
3	1	0	2
0	3	1	2
2	2	1	2

•	2	1	1
•	1	0	2
0	3	1	2
•	2	1	•

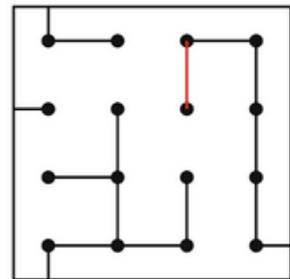
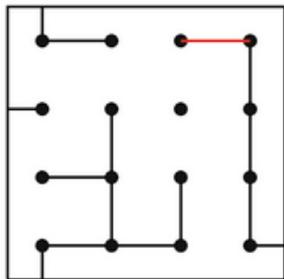
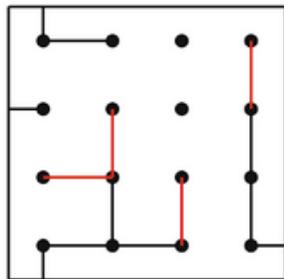
•	1	1	
1	0	2	
0	3	1	•
•	1	•	



		1	1
	1	0	•
0	•	1	
			•

		1	•
	•	0	
•		•	

•
0



Théorème de Kirchhoff : Le nombre d'arbre couvrant d'un graphe est égal au déterminant du laplacien discret.

$$\Delta = M_d - M_a$$

(Matrice des degrés – Matrice d'adjacence)

C'est la matrice de déversement Δ

Cardinal du groupe

$$A_n = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \Delta_n = \begin{pmatrix} An & -In & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -In & An & -In & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -In & An & -In & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -In & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & An & -In \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -In & An \end{pmatrix}$$

Cardinal du groupe

$$A_n = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \Delta_n = \begin{pmatrix} An & -In & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -In & An & -In & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -In & An & -In & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -In & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & An & -In \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -In & An \end{pmatrix}$$

$$M_n = \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & X & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & X \end{pmatrix}$$

Cardinal du groupe

$$A_n = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \Delta_n = \begin{pmatrix} An & -In & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -In & An & -In & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -In & An & -In & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -In & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & An & -In \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -In & An \end{pmatrix}$$

$$M_n = \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & X & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & X \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(M_n) = X \text{Det}(M_{n-1}) - \text{Det}(M_{n-2})$$

$$\text{Det}(M_n)\left(\frac{X}{2}\right) = U_n = \text{Chebyshev 2ème espèce}$$

$$\text{Det}(M_n) = \prod_{k=1}^n X - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

$$\text{Det}(A_n) = \prod_{k=1}^n 4 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

$$R = P^{-1}A_nP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda_k = 4 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

$$R = P^{-1}A_nP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_k = 4 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}^{-1}\Delta_n\mathcal{P} = \begin{pmatrix} R & -In & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -In & R & -In & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -In & R & -In & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -In & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R & -In \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -In & R \end{pmatrix}$$

$$R = P^{-1}A_nP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_k = 4 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}^{-1}\Delta_n\mathcal{P} = \begin{pmatrix} R & -In & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -In & R & -In & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -In & R & -In & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -In & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R & -In \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -In & R \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}^{-1}\Delta_n\mathcal{P} \sim \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & R_n \end{pmatrix} \quad R_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda_i & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda_i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$R = P^{-1}A_nP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_k = 4 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}^{-1}\Delta_n\mathcal{P} = \begin{pmatrix} R & -In & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -In & R & -In & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -In & R & -In & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -In & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R & -In \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -In & R \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}^{-1}\Delta_n\mathcal{P} \sim \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & R_n \end{pmatrix} \quad R_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda_i & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda_i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(R_i) = \prod_{k=1}^n 4 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) - 2 \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)$$

$$\text{Det}(\Delta_n) = \prod_{k=1}^n \prod_{i=1}^n 4 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) - 2 \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)$$

Les phénomènes qui relèvent de la criticalité auto-organisée sont caractérisés par des lois puissance

Exemple : Loi de Gutenberg Richter pour les séismes

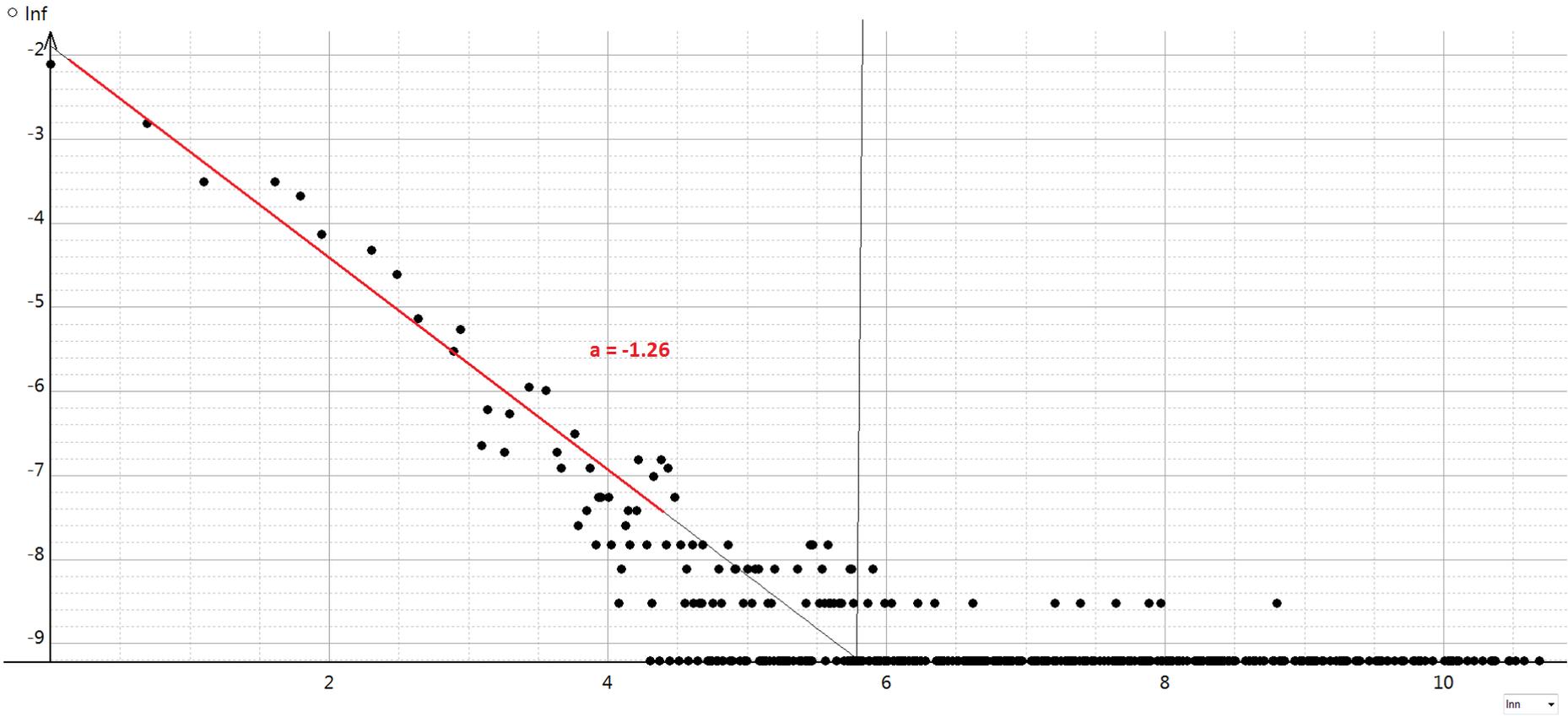
$$\log(N(m = M)) = a - bM$$

Pour une taille d'avalanche n (nombre d'éboulement jusqu'à stabilisation)

$f(n)$ la fréquence d'apparition

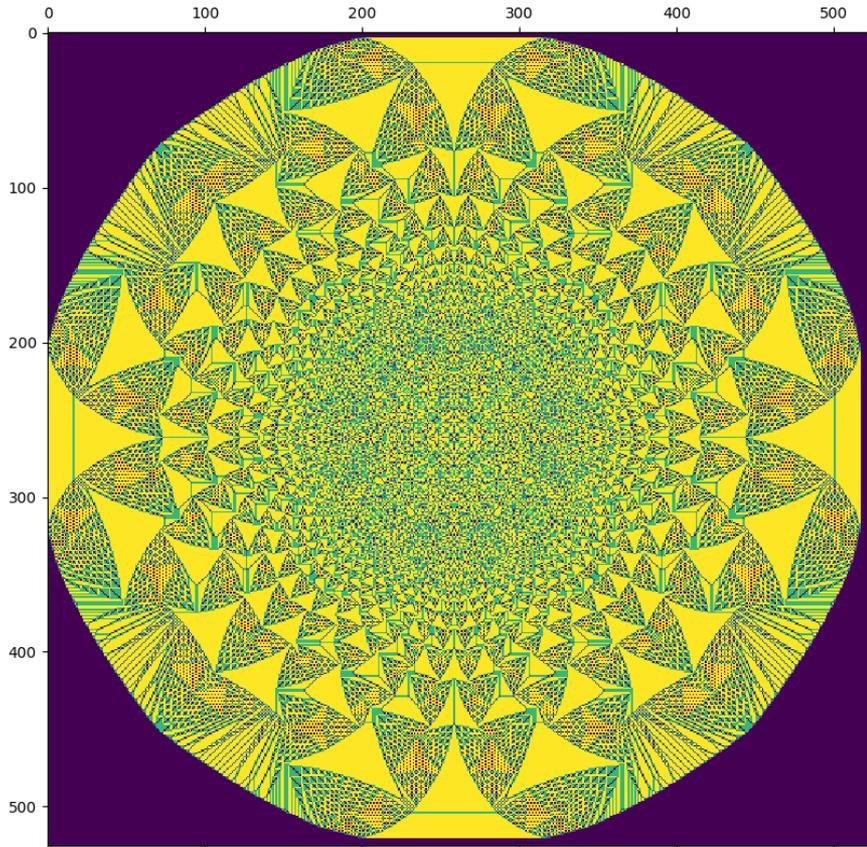
$$f(n) = \frac{K}{n^s}$$

Fréquence d'apparition en fonction de la taille des avalanches

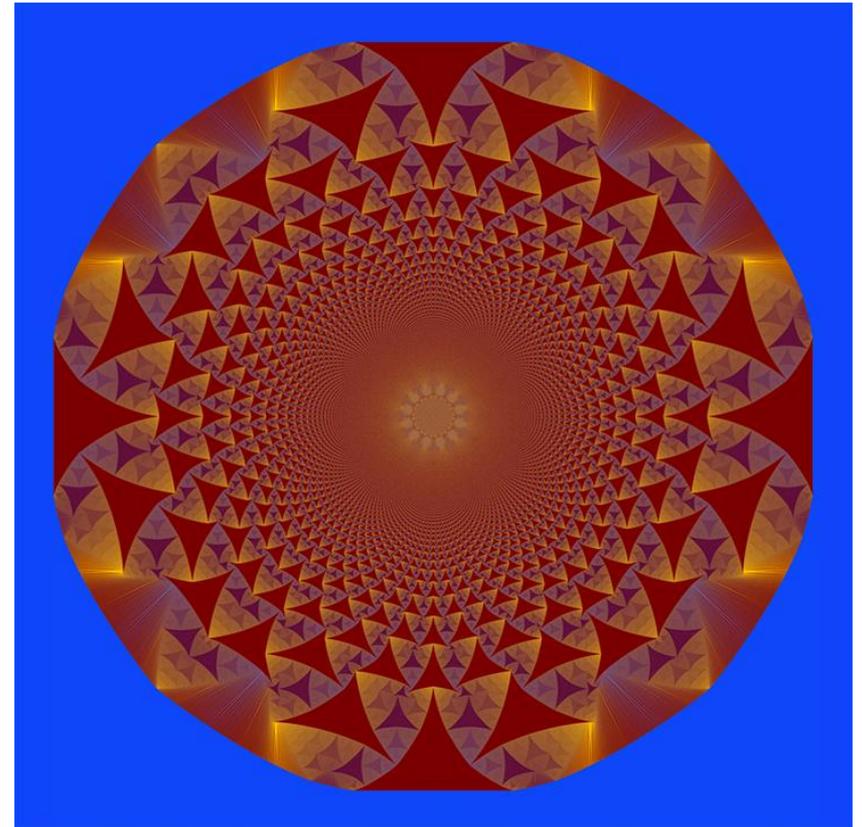


En grille infinie

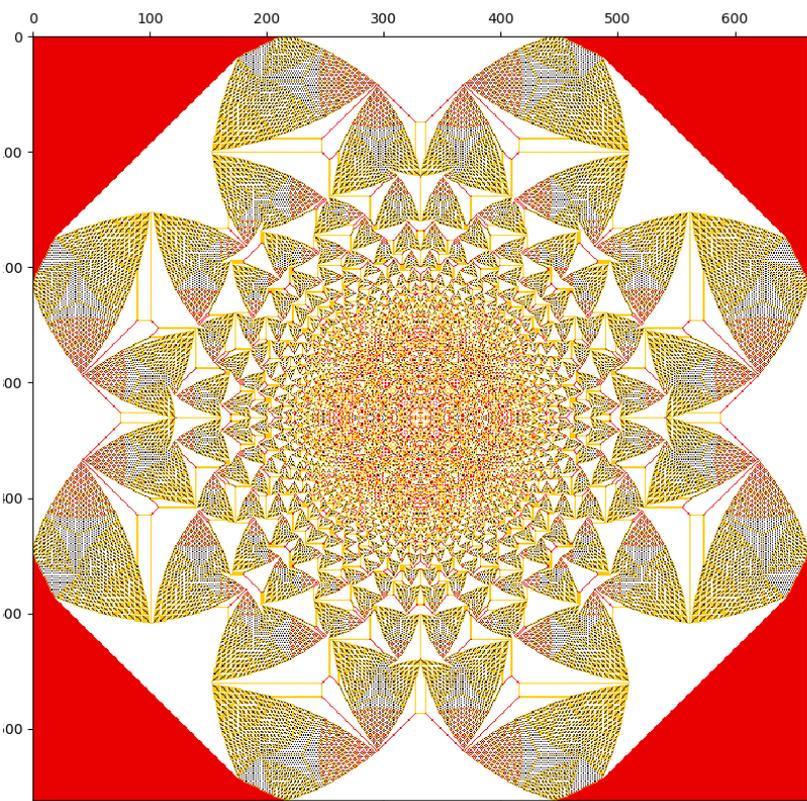
5×10^5 grains



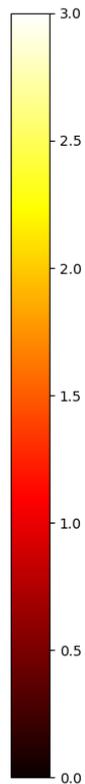
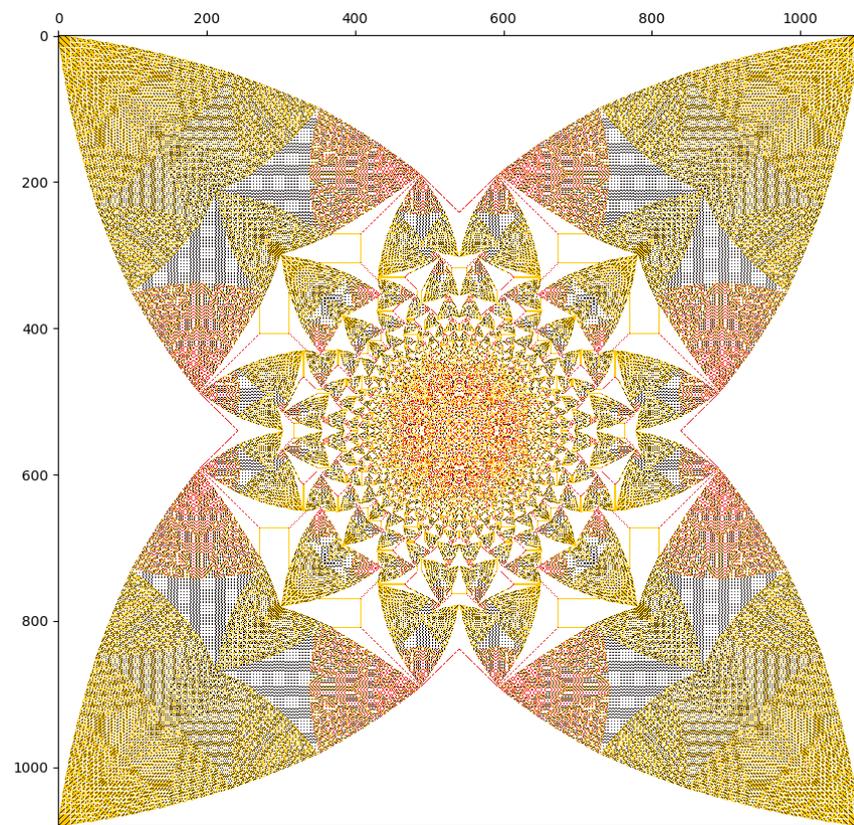
10^9 grains



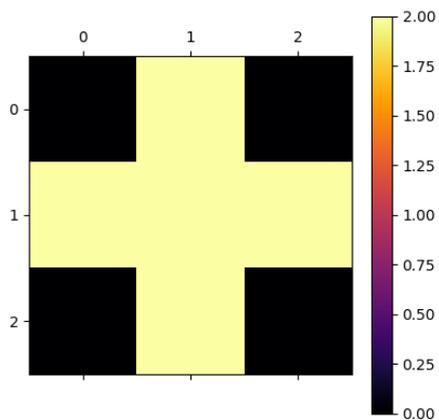
Sur fond de 1
 5×10^5 grains



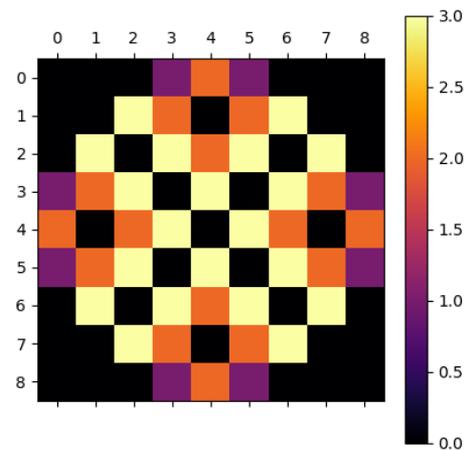
Sur fond de 2
 5×10^5 grains



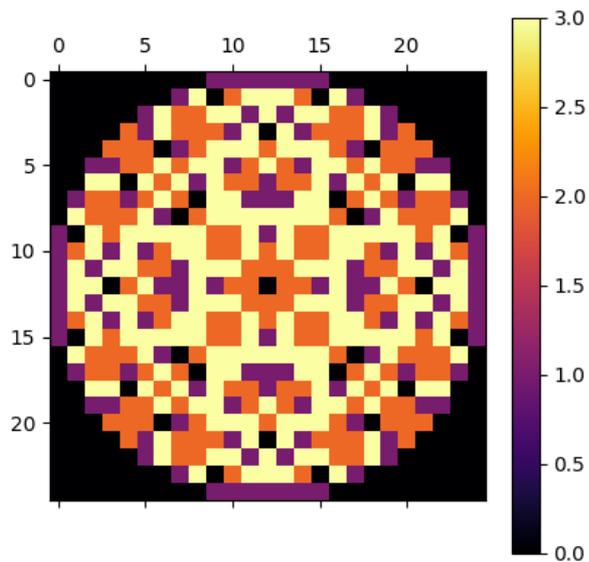
10



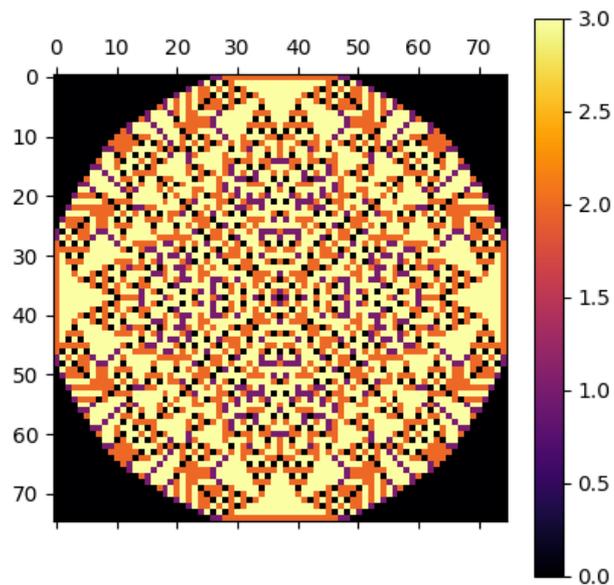
100



1000



10000



Conjecture sur $D(n)$

On note $D(n)$ le diamètre du cercle obtenu en ajoutant n grains au centre et en laissant stabiliser.

$$\text{Conjecture : } D(n) = \frac{3\sqrt{n}}{4}$$

